Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 35, núm. 1, 2020. Pàg. 5–22. DOI: 10.2436/20.2002.01.91

La paradoxa de Banach-Tarski i el semigrup de tipus

Pere Ara

Resum: En aquest article estudiarem un concepte clau en relació amb la coneguda paradoxa de Banach-Tarski. Es tracta del concepte d'equidescomponibilitat de subconjunts d'un conjunt X sobre el qual actua un grup discret G. Un subconjunt E de X és G-paradoxal si existeixen dos subconjunts disjunts E_1 i E_2 de E de manera que cadascun d'ells és equidescomponible amb E. L'estudi d'aquesta relació es pot sistematitzar mitjançant la introducció d'un cert semigrup $S(X,G)$, anomenat *semigrup de tipus d'equidescomponibilitat de* X (o, simplement, *semigrup de tipus*). Farem una exposició del teorema de Tarski, per a la demostració del qual utilitzarem el semigrup de tipus $S(X,G)$. Veurem algunes generalitzacions d'aquest concepte a un context topològic, i estudiarem la possible validesa del teorema de Tarski en aquest nou context. També explicarem un resultat recent de Grabowski, Máthé i Pikhurko que dona una resposta afirmativa al problema de la quadratura del cercle (en la seva versió moderna).

Paraules clau: paradoxa de Banach-Tarski, semigrup de tipus, teorema de Tarski, espai topològic, quadratura del cercle.

Classificació MSC2010: 43A07, 03E25, 20E05.

1 La paradoxa de Banach-Tarski

En la seva versió més coneguda, la paradoxa de Banach-Tarski diu que podem partir una taronja en un nombre finit de peces de manera que, reorganitzant aquestes peces d'una altra forma, obtenim dues taronges idèntiques a la inicial.[1] Una altra versió de la mateixa paradoxa afirma que podem subdividir un pèsol en un nombre finit de trossos de manera que reorganitzant-los obtenim una bola de la mateixa mida que el Sol. Aquesta paradoxa aparent (en qualsevol de les dues versions) és, de fet, un teorema demostrat per Stefan Banach i Alfred Tarski [4]. La seva demostració requereix l'axioma de l'elecció i, a la vegada,

1 O sigui, tenim una versió «valenciana» del miracle de la multiplicació dels pans i els peixos.

com ja va observar John von Neumann, està íntimament connectada amb una certa propietat dels grups, anomenada *mitjanabilitat*.[2]

En aquest *Butlletí* han aparegut sengles articles sobre la paradoxa de Banach-Tarski. Un d'ells ([13]) tracta de la connexió entre la paradoxa de Banach-Tarski i l'axioma de l'elecció, i l'altre ([5]) és sobre la connexió entre la mateixa paradoxa i la teoria de grups. En el nostre treball tractarem d'un altre tema relacionat amb la paradoxa de Banach-Tarski, com és la noció bàsica de la relació d'equidescomponibilitat de conjunts respecte de l'acció d'un grup. L'estudi d'aquest concepte es pot sistematitzar gràcies a la consideració d'un semigrup commutatiu, el *semigrup de tipus d'equidescomponibilitat*, al qual ens referirem simplement com el *semigrup de tipus*. Estudiarem les propietats d'aquest semigrup, i n'estendrem la definició al context topològic. Veurem que en aquest context més general, l'anomenada *alternativa de Tarski* falla per l'aparició en escena d'un nou tipus de paradoxalitat, que podem anomenar (m, n)-paradoxalitat per a $1 < m < n$. També descriurem un resultat recent espectacular, degut a Grabowski, Máthé i Pikhurko [8], sobre la versió moderna del problema de la quadratura del cercle.

Primer de tot enunciarem el teorema de Banach-Tarski. En tot l'article usarem la notació $\sqcup$ per a referir-nos a una *unió disjunta*, o sigui, una unió de subconjunts d'un cert conjunt de manera que els subconjunts són disjunts dos a dos.

Teorema 1 (Teorema de Banach-Tarski). *Sigui $\mathbb{B}$ la bola unitat a $\mathbb{R}^3$. Llavors existeix una descomposició*

$$\mathbb{B} = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_m$$

i isometries $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m$ de $\mathbb{R}^3$ tals que

$$\mathbb{B} = g_1 A_1 \sqcup \cdots \sqcup g_n A_n = h_1 B_1 \sqcup \cdots \sqcup h_m B_m.$$

Es pot demostrar que el nombre mínim de peces és $n + m = 5$. Podeu veure una demostració d'aquest resultat a l'article [5] aparegut en aquest *Butlletí*. Una referència imprescindible per a l'estudi de la paradoxa de Banach-Tarski és el llibre de Tomkowicz i Wagon [20].

Presentem ara el marc general. Sigui G un grup que actua sobre un conjunt X. Dos subconjunts E, E' de X són *G-equidescomponibles*, denotat per $E \sim_G E'$, si

$$E = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n, \quad E' = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \cdots \sqcup B_n$$

i existeixen $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$ tals que $B_i = g_i A_i$ per a tot $i = 1, \dots, n$.

Un subconjunt $E \subseteq X$ s'anomena *paradoxal* si existeixen E_1, E_2 tals que $E_1 \sqcup E_2 \subseteq E$ amb $E_1 \sim_G E$ i $E_2 \sim_G E$.

El *semigrup de tipus* $S(X, G)$ es defineix mitjançant l'anterior relació d'equidescomponibilitat:

2 Els termes *mitjanable* i *mitjanabilitat* que usem en aquest article provenen dels termes anglesos *amenable* i *amenability*, respectivament.

Definició 2. Sigui G un grup que actua sobre un espai X. Aleshores $S(X,G)$ és el semigrup commutatiu generat per símbols $[E]$, on $E \subseteq X$, subjecte a les relacions següents:

(1) $[\varnothing] = 0$,
(2) $[E \cup F] = [E] + [F]$ si $E \cap F = \varnothing$,
(3) $[gE] = [E]$ per a tot $E \in \mathcal{P}(X)$ i tot $g \in G$.

Observació. Es pot demostrar, utilitzant la proposició 4, que veurem a continuació, que per a $E, E' \subseteq X$, tenim que $[E] = [E']$ a $S(G,X)$ si, i només si, $E \sim_G E'$. Per tant, els elements de $S(X,G)$ són les sumes finites de classes d'equidescomponibilitat $[E]$, per a $E \subseteq X$.

Encara que la definició anterior és conceptualment simple, moltes vegades es necessita una descripció més detallada dels elements del semigrup $S(X,G)$. Això és el que va fer Tarski en el seu treball [19] (vegeu també el capítol 10 de [20]). La idea fonamental és ampliar l'acció de G sobre X a una acció sobre una quantitat numerable de còpies de X, de manera que tinguem «prou espai» per a representar tots els elements del semigrup. Aquesta idea és, de fet, prou similar a la que es fa servir en teoria K, on passem per exemple d'un anell R al seu estabilitzat $M_\infty(R)$, que és una unió inductiva de matrius finites de totes les mides. El lector interessat a conèixer més detalls sobre teoria K pot consultar l'excel·lent llibre de Jonathan Rosenberg ([17]).

Definició 3. Sigui G un grup que actua sobre un conjunt X. Definim una acció ampliada com segueix. Sigui $X^* = X \times \mathbb{N}$, i sigui $G^* = G \times \Sigma(\mathbb{N})$, on $\Sigma(\mathbb{N})$ denota el grup de permutacions de $\mathbb{N}$. El grup G^* actua sobre X^* de forma natural: $(g,\pi)(x,n) = (gx, \pi(n))$. Si A és un subconjunt de X^*, els nivells de A són aquells enters n tals que existeix un element de A amb segona coordenada igual a n.

Observem que per a $E \subseteq X$ tenim que $E \times \{n\} \sim_{G^*} E \times \{m\}$ per a $n, m \in \mathbb{N}$. Això permet considerar còpies disjuntes de qualsevol subconjunt de X.

Un subconjunt A de X^* s'anomena *fitat* si té només un nombre finit de nivells. Denotem la classe d'equivalència d'un subconjunt fitat A respecte de la relació de G^*-equidescomponibilitat per $[A]$. Sigui S la col·lecció de totes les classes d'equivalència de subconjunts fitats de X^*. Llavors S admet una estructura de semigrup commutatiu, on

$$[A] + [B] = [A \cup B']$$

per a subconjunts fitats A i B de X^*, on B' és una còpia de B que és disjunta de A.

Ara podem demostrar que la construcció anterior ens dona un semigrup isomorf al semigrup de tipus $S(X,G)$.

Proposició 4. *Sigui G un grup que actua sobre un conjunt X. Existeix un isomorfisme natural $S(X,G) \to S$, que envia $[A]$ a $[A \times \{1\}]$ per a $A \subseteq X$.*

Prova. Definim una aplicació $\varphi\colon S(X,G)\to S$ per la regla $\varphi([A])=[A\times\{1\}]$ per a $A\subseteq X$. Per tal de veure que aquesta regla està ben definida i dona un morfisme de semigrups, cal observar que preserva les relacions definidores de $S(X,G)$. Però això és clar per la relació de G^*-equidescomponibilitat. També és clar que φ és exhaustiva, ja que, si $A\subseteq X^*$ té nivells $k_1,k_2,\dots,k_r$, llavors posem $A=\bigsqcup_{i=1}^r A_i\times\{k_i\}$, amb $A_i\subseteq X$, i tenim que $[A]=\varphi(\sum_{i=1}^r[A_i])$.

Queda, doncs, per comprovar que φ és injectiva. Suposem que $\varphi(\sum_{i=1}^n[A_i])=\varphi(\sum_{i=1}^m[B_i])$. Aleshores tenim que

$$A:=\bigcup_{i=1}^n[A_i\times\{i\}]\sim_{G^*},\quad B:=\bigcup_{i=1}^m[B_i\times\{i\}].$$

Per tant, existeixen subconjunts $W_1,\dots,W_l$, elements $g_1,\dots,g_l$ de G i enters positius $n_1,\dots,n_l,m_1,\dots,m_l$ tals que

$$A=\bigsqcup_{k=1}^l W_k\times\{n_k\},\quad B=\bigsqcup_{k=1}^l g_kW_k\times\{m_k\}.$$

Llavors tenim dues particions $\{1,\dots,l\}=\bigsqcup_{i=1}^n I_i$ i $\{1,\dots,l\}=\bigsqcup_{i=1}^m J_i$ tals que per a cada $i\in\{1,\dots,n\}$ tenim que $A_i=\bigsqcup_{j\in I_i}W_j$ i per a tot $j\in\{1,\dots,m\}$ tenim que $B_j=\bigsqcup_{i\in J_j}g_iW_i$. S'obté la igualtat següent a $S(X,G)$:

$$\sum_{i=1}^n[A_i]=\sum_{i=1}^n\sum_{j\in I_i}[W_j]=\sum_{j=1}^l[W_j]=\sum_{j=1}^l[g_jW_j]=\sum_{j=1}^m\sum_{i\in J_j}[g_iW_i]=\sum_{j=1}^m[B_j].$$

Això demostra que φ és injectiva, i es completa l'argument. □

Com a conseqüència d'aquest resultat, utilitzarem de manera indistinta qualsevol de les dues descripcions anteriors del semigrup de tipus $S(X,G)$.

Ara podem expressar la qualitat de paradoxalitat dels subconjunts de X en termes del semigrup de tipus. Primer introduïm el preordre $\le$ en qualsevol semigrup commutatiu M mitjançant la relació $x\le y$ si, i només si, existeix un element z de M tal que $y=x+z$. Aquest preordre s'anomena *preordre algebraic* de M. Ara observem que $E\subseteq X$ és paradoxal si, i només si, $2[E]\le[E]$ a $S(X,G)$.

L'estudi del concepte de paradoxalitat va portar a la important noció de *grup mitjanable*: Un grup discret Γ s'anomena *mitjanable* si ${}_\Gamma\Gamma$ *no* és paradoxal, on ${}_\Gamma\Gamma$ denota el conjunt Γ amb l'acció del grup Γ definida mitjançant multiplicació per l'esquerra. El lector pot consultar [5] pel que fa a la relació entre la paradoxa de Banach-Tarski i la teoria de grups. Un fet bàsic en la teoria és que qualsevol grup lliure no commutatiu és no mitjanable.

2 La quadratura del cercle

En el segle XX, Tarski va enunciar una versió diferent del conegut enigma dels grecs sobre la quadratura del cercle, que consisteix en la constructibilitat amb regle i compàs d'un cercle d'àrea 1.

En aquesta nova versió ([18]) es pregunta si un cercle i un quadrat de la mateixa àrea són equidescomponibles respecte del grup de totes les isometries de $\mathbb{R}^2$. La primera observació important és que, perquè siguin equidescomponibles, han de tenir necessàriament la mateixa àrea. Això es deu al fet que el grup G_2 de les isometries de $\mathbb{R}^2$ és un grup mitjanable; de fet, és un grup resoluble, i és ben conegut que tots els grups resolubles són mitjanables. Hom pot demostrar que la mesura de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^1$ i sobre $\mathbb{R}^2$ es pot estendre a una mesura finitament additiva definida a tots els subconjunts. De fet, tenim el resultat següent:

Teorema 5. *Si G és un grup mitjanable d'isometries de $\mathbb{R}^n$, llavors existeix una extensió de la mesura de Lebesgue λ a una mesura finitament additiva i G-invariant definida sobre tots els subconjunts de $\mathbb{R}^n$. En particular, existeix una extensió de la mesura de Lebesgue a tots els subconjunts de $\mathbb{R}^1$ o $\mathbb{R}^2$ que és invariant per isometries.*

Per a una demostració del teorema 5, el lector pot consultar el capítol 12 de [20].

Així doncs, si tenim dues regions mesurables A i B de $\mathbb{R}^2$ que són equidescomponibles respecte del grup G_2 d'isometries de $\mathbb{R}^2$, amb $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$, $B = \bigsqcup_{i=1}^n g_i A_i$, $g_i \in G_2$, i $\overline{\lambda}$ és una extensió de la mesura de Lebesgue λ com en el teorema 5, aleshores tenim

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda}(A_i) = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda}(g_i A_i) = \lambda(B),$$

de manera que A i B tenen la mateixa àrea.

El 1924, Tarski va demostrar que dos polígons de la mateixa àrea són equidescomponibles entre si (vegeu el capítol 3 de [20]). Finalment, Laczkovich va demostrar el resultat sobre la quadratura del cercle ([10, 11]), però les peces obtingudes en la seva demostració no són mesurables.

En un resultat recent, Grabowski, Máthé i Pikhurko ([8]) han demostrat que es pot fer la quadratura del cercle amb peces que són a la vegada mesurables en el sentit de Lebesgue i mesurables en el sentit de Baire. Recordem que un subconjunt és mesurable en el sentit de Baire si és la diferència simètrica d'un conjunt de Borel i un conjunt magre.

El teorema de Grabowski, Máthé i Pikhurko és, de fet, a la vegada més fort i més general que el que hem esmentat en el paràgraf anterior. Per a enunciar-lo necessitem algunes definicions prèvies. Primer definim la dimensió per caixes (*box dimension*) de $X \subseteq \mathbb{R}^k$ com

$$\dim_{\square}(X) := k - \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log \lambda(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : \operatorname{dist}(\mathbf{x}, X) \leq \varepsilon\})}{\log \varepsilon},$$

on $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, X)$ és la distància L^∞ des del punt $\mathbf{x}$ al conjunt X.

Per a conjunts A i B de $\mathbb{R}^k$, diem que A i B són congruents per translacions ($A \overset{\mathrm{Tr}}{\sim} B$), si A i B són equidescomponibles respecte al grup de totes les translacions de $\mathbb{R}^k$, és a dir, existeix una descomposició

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n$$

i translacions $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de $\mathbb{R}^k$ tals que

$$B = \sigma_1(A_1) \sqcup \sigma_2(A_2) \sqcup \cdots \sqcup \sigma_n(A_n).$$

Denotant per ∂A la frontera topològica de A, podem enunciar el teorema com segueix:

TEOREMA 6 ([8, teorema 1.2]). *Sigui $k \geq 1$, i siguin A i B subconjunts mesurables i fitats de $\mathbb{R}^k$ tals que $\lambda(A) = \lambda(B)$, $\dim(\partial A) < k$, i $\dim(\partial B) < k$. Llavors $A \overset{\mathrm{Tr}}{\sim} B$ amb peces que són a la vegada mesurables en el sentit de Lebesgue i en el sentit de Baire.*

Com a conseqüència immediata hom obté la següent versió moderna de la quadratura del cercle:

COROL·LARI 7. *Un cercle i un quadrat de la mateixa àrea són congruents per translacions a $\mathbb{R}^2$.*

3 El teorema de Tarski

El teorema de Tarski permet connectar dues definicions aparentment diferents de *grup mitjanable*. Aquí presentem la versió més general sobre accions en conjunts, seguint [20, capítol 11]. Recordem que una mesura $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ s'anomena *finitament additiva* si $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ per a tots $A, B \in \mathcal{P}(X)$ mútuament disjunts, i que, si G és un grup que actua sobre X, la mesura μ s'anomena *G-invariant* si $\mu(gA) = \mu(A)$ per a tot $g \in G$ i tot $A \in \mathcal{P}(X)$. Observem en aquest punt el fet important que les mesures finitament additives i G-invariants sobre X es corresponen naturalment amb els morfismes de semigrups $\mu\colon S(X, G) \to [0, +\infty]$, on $S(X, G)$ és el semigrup de tipus corresponent a l'acció de G sobre X.

TEOREMA 8 (TEOREMA DE TARSKI). *Sigui G un grup que actua sobre un conjunt X. Donat $E \subseteq X$, les propietats següents són equivalents:*

(a) E no és paradoxal.

(b) Existeix una mesura finitament additiva i G-invariant

$$\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

tal que $\mu(E) = 1$.

La implicació (b) $\Longrightarrow$ (a) és trivial. De fet, si existeix una tal mesura μ i E és un conjunt paradoxal, amb $E_1 \sqcup E_2 \subseteq E$ i $E \sim_G E_i$ per a $i = 1, 2$, llavors tenim que $\mu(E) = \mu(E_i)$, $i = 1, 2$, i, per tant, obtenim la contradicció $2 = \mu(E_1 \sqcup E_2) \leq \mu(E) = 1$.

La demostració de (a) $\Longrightarrow$ (b) usa una mena de teorema de Hahn-Banach per a semigrups, que Tarski va demostrar:

TEOREMA 9 (TARSKI). *Sigui $(S, +)$ un semigrup commutatiu i $e \in S$. Aleshores les condicions següents són equivalents:*

(a) Per a tot $n \in \mathbb{N}$, es compleix $(n+1)e \not\leq ne$.

(b) Existeix un morfisme de semigrups $\mu\colon S \to [0, \infty]$ tal que $\mu(e) = 1$.

A més, la demostració usa també les propietats següents de $S(X, G)$:

Axioma de Schröder-Bernstein: $a \leq b$ i $b \leq a \implies a = b$.

Llei de cancel·lació: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad na = nb \implies a = b$.

De fet, per l'observació que hem fet tot just abans del teorema 8, tenim que, pel semigrup $S = S(X, G)$ i l'element $e = [E]$ de S, la condició (b) del teorema 8 es correspon exactament amb la condició (b) del teorema 9. Per tant, per demostrar la implicació (a) $\Longrightarrow$ (b) del teorema 8 a partir del teorema 9, només cal veure que la condició (a) del teorema 8 és equivalent a la condició (a) del teorema 9 per l'element $e = [E]$. Això és el mateix que demostrar que, per a $e \in S(X, G)$, tenim

$$2e \leq e \iff (n+1)e \leq ne \quad \text{per a algun } n.$$

La implicació $\implies$ és trivial. Per a demostrar l'altra implicació, suposem que $(n+1) \leq ne$ per a algun $n \geq 1$. Llavors $(n+1)e = ne$ per Schröder-Bernstein, i

$$(n+1)e = ne \implies n(2e) = ne \implies 2e = e \quad \text{per la llei de cancel·lació.}$$

Per tant, hem vist que el teorema de Tarski (teorema 8) es deriva del teorema 9, que és un resultat general de teoria de semigrups i que no demostrarem aquí, i del fet que els semigrups de la forma $S(X, G)$ satisfan l'axioma de Schröder-Bernstein i la llei de cancel·lació. En la resta d'aquesta secció, donarem les idees principals que permeten demostrar aquestes dues propietats del semigrup de tipus $S(X, G)$. Cal tenir present que cap d'aquestes dues propietats se satisfà en el context més general que estudiem en les properes seccions.

La propietat de Schröder-Bernstein per a $S(X, G)$ és, de fet, la propietat antisimètrica del preordre algebraic $\leq$ sobre $S(X, G)$, o sigui que aquesta propietat es compleix si, i només si, $\leq$ és un ordre parcial sobre $S(X, G)$. Aquesta propietat es dedueix del teorema de Banach-Schröder-Bernstein (vegeu [20, teorema 3.6]), que és una generalització del conegut teorema de Schröder-Bernstein per a conjunts. Aquest resultat és molt útil a l'hora de demostrar que dos conjunts donats són equidescomponibles. Observem que una conseqüència immediata de la propietat de Schröder-Bernstein és que un subconjunt E de X és G-paradoxal si, i només si, $2[E] = [E]$ a $S(G, X)$, de manera que podem descompondre E exactament com la unió de dos subconjunts disjunts E_1 i E_2 amb $E \sim_G E_i$ per a $i = 1, 2$.

Pel que fa a la llei de cancel·lació per a $S(X, G)$, aquesta es demostra utilitzant el teorema de Hall-Rado-Hall per a grafs bipartits. Recordem que un *graf bipartit* és un graf els vèrtexs del qual es divideixen en dos conjunts A i B de forma que totes les arestes del graf connecten un vèrtex de A amb un vèrtex de B. Un *aparellament* (*matching* en anglès) és un conjunt d'arestes tals que els vèrtexs incidents són mútuament diferents. Segons el clàssic teorema de Hall-Rado, si tenim un graf bipartit finit Γ amb parts A i B, llavors Γ té un aparellament que cobreix tots els vèrtexs de A si, i només si, per a cada k, tot conjunt de k vèrtexs de A té com a mínim k veïns (o sigui, existeixen com a mínim k elements de B que es connecten amb aquests k elements de A mitjançant arestes de Γ). Aquest resultat es deu a Phillip Hall i Richard Rado i s'anomena també *teorema del matrimoni* (*marriage theorem*). Marshall Hall el va generalitzar al cas de grafs infinits:

Teorema 10 (Teorema de Hall-Rado-Hall). *Sigui Γ un graf bipartit amb parts A i B de manera que cada vèrtex de A té un grau finit. Llavors Γ admet un aparellament que cobreix tots els vèrtexs de A si, i només si, per a cada nombre natural k, tot conjunt de k vèrtexs de A té com a mínim k veïns a B.*

Podem esbossar una demostració d'aquest resultat a partir del teorema de Hall-Rado com segueix: Donem a B la topologia discreta i a B^A la topologia producte. Per a cada $a \in A$, sigui N_a el subconjunt finit de B format per tots els veïns de a. Llavors el producte $Y := \prod_{a\in A} N_a$ és un subconjunt compacte de B^A pel teorema de Tikhonov. Ara, per a cada subconjunt finit i no buit H de A, sigui $M(H)$ el conjunt de totes les funcions $f \in Y \subseteq B^A$ tals que $f|_H$ és un aparellament. Pel teorema de Hall-Rado, $M(H) \neq \emptyset$. A més, els conjunts $M(H)$ són claramemt subconjunts tancats de Y. Si $H_1, H_2, \dots, H_n$ són subconjunts finits i no buits de Y, aleshores

$$M(H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} M(H_i),$$

i, per tant, la família $\{M(H)\}$, on H varia en tots els subconjunts finits i no buits de A, compleix la propietat de la intersecció finita i així la intersecció de tots aquests conjunts és no buida (ja que Y és compacte). Un element f d'aquesta intersecció ens dona el aparellament desitjat.

Ara ja podem donar la demostració de la llei de cancel·lació. De fet, provarem el resultat següent, que és més fort que la llei de cancel·lació atès que $\leq$ és un ordre parcial a $S(X, G)$. Per a la demostració seguim bàsicament [20, teorema 10.20].

Teorema 11. *Sigui G un grup que actua sobre un conjunt X, i siguin $\alpha, \beta \in S(X, G)$ i $n \in \mathbb{N}$ tals que $n\alpha \leq n\beta$. Llavors tenim que $\alpha \leq \beta$.*

PROVA. Si $n\alpha \leq n\beta$, llavors podem trobar dos conjunts disjunts, fitats i G^*-equidescomponibles E i F de X^* tals que

$$E = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n, \quad F = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n,$$

i de manera que $[A_i] = \alpha$ i $[B_j] = \beta$ per a tot i, j. Sabem que $E \sim E'$ per a cert $E' \subseteq F$. Sigui $\chi\colon E \to E' \subseteq F$ la corresponent G^*-congruència. Siguin $\phi_i\colon A_1 \to A_i$ i $\psi_i\colon B_1 \to B_i$ G^*-congruències, amb ϕ_1 i ψ_1 iguals a la identitat. Per a $a \in A_1$, posem $\overline{a} = \{a, \phi_2(a), \ldots, \phi_n(a)\}$ i per a $b \in B_1$, posem $\overline{b} = \{b, \psi_2(b), \ldots, \psi_n(b)\}$. Observem que $\{\overline{a} : a \in A_1\}$ i $\{\overline{b} : b \in B_1\}$ donen particions de E i E' respectivament.

Formem un graf bipartit amb dues parts $A = \{\overline{a} : a \in A_1\}$ i $B = \{\overline{b} : b \in B_1\}$. Posem n arestes que connectin $\overline{a}$ amb vèrtexs de B. De fet, posem una aresta entre $\overline{a}$ i $\overline{b}$ si, i només si, $\chi\phi_i(a) \in \overline{b}$ per a algun $i = 1, \ldots, n$. Aquest graf és n-regular en A i de grau màxim n en B. Per veure que es compleix la hipòtesi del teorema de Hall-Rado-Hall, suposem que Y és un subconjunt de A amb k elements. Llavors existeixen exactament nk arestes que connecten Y amb elements de B. Si Z denota el conjunt dels veïns de Y i $|Z|$ és menor que k, llavors tindrem un nombre d'arestes que connecten Z amb Y menor que kn; per tant, tenim que $|Z| \geq k$, com volíem.

Ara el teorema 10 ens dona un aparellament M que cobreix tots els vèrtexs de A. Donat $\overline{a} \in A$, existeix un sol vèrtex $\overline{b} \in B$ tal que $(\overline{a}, \overline{b}) \in M$, i, pert tant, tenim que $\chi\phi_i(a) = \psi_j(b)$ per a certs i, j. Sigui $C_{ij} = \{a \in A_1 : (\overline{a}, \overline{b}) \in M \text{ i } \chi\phi_i(a) = \psi_j(b)\}$, i, similarment, sigui $D_{ij} = \{b \in B_1 : (\overline{a}, \overline{b}) \in M \text{ i } \chi\phi_i(a) = \psi_j(b)\}$. Aleshores, $\psi_j^{-1}\chi\psi_i$ envia C_i a D_j i és una G^*-congruència perquè ψ_i, χ i ψ_j ho són. Com que $\{C_{ij}\}$ és una partició de A_1 i $\{D_{ij}\}$ són subconjunts mútuament disjunts de B_1, obtenim que $\alpha \leq \beta$. □

4 Una generalització topològica del semigrup de tipus

El semigrup de tipus $S(X, G)$ de l'acció d'un grup G sobre un conjunt X ha estat generalitzat de diverses maneres; vegeu, per exemple, el capítol 10 de [20]. Aquí tractarem una generalització topològica que ha despertat recentment l'atenció d'alguns investigadors; vegeu [9, 12, 14, 15, 16].

Per començar considerem un grup G que actua sobre un conjunt X. Recordem que una *àlgebra de conjunts* de X és una família de subconjunts de X que conté $\emptyset$ i X, és tancada per interseccions i unions finites, i també és tancada per complements. Diem que una àlgebra de conjunts $\mathbb{D}$ és *G-invariant* si $g(D) \in \mathbb{D}$ per a cada $g \in G$ i $D \in \mathbb{D}$.

Sigui G un grup que actua sobre un conjunt X i sigui $\mathbb{D}$ una àlgebra G-invariant de conjunts de X. Llavors podem restringir la relació de G-equidescomponibilitat a elements de $\mathbb{D}$, i així obtenim un semigrup de tipus $S(X, G, \mathbb{D})$ relatiu a $\mathbb{D}$. Més concretament, el semigrup $S(X, G, \mathbb{D})$ és el semigrup commutatiu amb generadors $[D]$ per a $D \in \mathbb{D}$, i amb les mateixes relacions que les usades a la definició 2. Si $A, B \in \mathbb{D}$, posem $A \sim_G B$ si podem descompondre A en unió disjunta de subconjunts $A_1, \ldots, A_n$, tots ells pertanyents a $\mathbb{D}$, i podem trobar elements $g_1, \dots, g_n \in G$ tals que B és la unió disjunta de $g_1A_1, \dots, g_nA_n$. Es pot obtenir amb la mateixa demostració, bàsicament una descripció de $S(G, X, \mathbb{D})$ similar a la donada al teorema 4.

En articles recents de Rørdam-Sierakowski [16] i Kerr-Nowak [9], s'ha considerat el cas particular següent. Recordem que un espai topològic es diu que té *dimensió zero* si admet una base de conjunts que són a la vegada oberts i tancats. Sigui G un grup que actua per homeomorfismes sobre un espai de Hausdorff compacte i de dimensió zero X. Prenem com a àlgebra de conjunts de X l'àlgebra $\mathbb{K}$ de tots els oberts i tancats de X. Un exemple d'aquests espais és el conjunt de Cantor. Aquest espai es pot caracteritzar topològicament per la propietat de ser un espai compacte Hausdorff metritzable de dimensió zero perfecte. (Un espai topològic s'anomena *perfecte* si no té punts aïllats.) Existeixen nombrosos models de conjunt de Cantor, com ara el clàssic que s'obté suprimint intervals centrals successius, començant amb l'interval $[0, 1]$. Un model important és de la forma $A^{\mathbb{N}}$, un espai producte on A és un conjunt finit amb més d'un element.

Obtenim així, en les condicions anteriors, el semigrup de tipus $S(X, G, \mathbb{K})$. Una pregunta natural és quina mena de condicions satisfà el semigrup de tipus $S(X, G, \mathbb{K})$. Es compleix un anàleg del teorema de Tarski? En l'estudi dels invariants associats a les C^*-àlgebres, s'ha demostrat que és important la condició anomenada de *quasi-no-perforat*. Un semigrup M és quasi-no-perforat si per a $x, y \in M$ i $n \in \mathbb{N}$, $(n + 1)x \le ny$ implica que $x \le y$. Pel teorema 9 és clar que, si $S(X, G, \mathbb{K})$ és quasi-no-perforat, llavors es compleix el teorema de Tarski en la seva versió topològica. Aquí el tipus de mesures que s'obtenen en el teorema de Tarski són finitament additives sobre l'àlgebra $\mathbb{K}$ en valors a $[0, \infty]$. Quan l'espai és metritzable, aquestes mesures es poden estendre de manera única a mesures de Borel regulars sobre X ([16, lema 5.1]).

5 Accions parcials

Podem generalitzar el que acabem de presentar al cas d'accions parcials de grups, que s'usen, per exemple, en construccions com les que trobem en [2]. Com a motivació esmentem un exemple fonamental: hom obté una acció parcial d'un grup G sobre un conjunt X restringint una acció global a un subconjunt que no és invariant. Aquí ens limitarem a accions parcials de grups sobre espais topològics. Per a més informació sobre accions parcials, el lector pot consultar el llibre de Ruy Exel [7]

Definició 12. Una *acció parcial* d'un grup G sobre un espai topològic X consisteix en una col·lecció $\{X_g\}$ de subconjunts oberts de X, junt amb homeomorfismes

$$\theta_g \colon X_{g^{-1}} \to X_g$$

tals que $\theta_1 = \mathrm{Id}_X$ i

$$\theta_{gh} \supseteq \theta_g \circ \theta_h$$

per a $g, h \in G$.

En aquesta definició cal fer alguns aclariments. En primer lloc, dues aplicacions parcialment definides, diguem $f\colon Y \to X$ i $g\colon Z \to X$, on Y, Z són subconjunts de X, es poden compondre amb la regla que el seu domini sigui el més gran possible. Concretament, $g \circ f$ és una aplicació parcialment definida sobre X amb domini $Y \cap f^{-1}(Z)$ i imatge $g(f(Y) \cap Z)$. En segon lloc, si f i g són dues aplicacions parcialment definides sobre un conjunt X, llavors el símbol $g \subseteq f$ significa que f estén g, és a dir, que el domini de g està contingut en el domini de f, i que la restricció de f al domini de g coincideix amb g.

Ara, si β defineix una acció global de G per homeomorfismes sobre un espai topològic Y i X és un subespai obert de Y, podem definir una acció parcial de G sobre X posant per a cada $g \in G$, $X_g = X \cap \beta_g(X)$. Observem que X_g és un obert de X per a cada $g \in G$ i que

$$\beta_g(X_{g^{-1}}) = \beta_g(X \cap \beta_{g^{-1}}(X)) = \beta_g(X) \cap X = X_g.$$

Per tant, podem definir

$$\alpha_g\colon X_{g^{-1}} \to X_g$$

com la restricció de β_g a $X_{g^{-1}}$, i hom pot demostrar que α és una acció parcial de G sobre X, anomenada *restricció de β a X*.

El procés invers del procés anterior s'anomena *globalització d'una acció parcial*. Per a una acció parcial α de G sobre X, aquest procés consisteix a trobar una acció global β de manera que la seva restricció a X sigui l'acció parcial α. Vegeu [1] per a més detalls.

Considerem una acció parcial $(\{X_g : g \in G\}, \{\theta_g : g \in G\})$ de G sobre un conjunt compacte Hausdorff de dimensió zero X, i sigui $\mathbb{K}$ l'àlgebra dels subconjunts oberts i tancats de X. Suposem també que $X_g \in \mathbb{K}$ per a tot $g \in G$. Llavors clarament $\mathbb{K}$ és G-invariant en el sentit que per a cada element $g \in G$ i cada $U \in \mathbb{K}$, tenim que $\theta_g(U \cap X_{g^{-1}}) \in \mathbb{K}$. En aquestes condicions, podem definir també el semigrup de tipus $S(X, G, \mathbb{K})$. Els generadors són també les classes $[U]$ amb $U \in \mathbb{K}$, i només cal modificar la relació (3) a la definició 2 per la condició

(3') $[U] = [gU]$ per a tot $g \in G$ i tot $U \in \mathbb{K}$ tal que $U \subseteq X_{g^{-1}}$.

En aquest nivell de generalitat, ens podem preguntar quines són les propietats que satisfan els semigrups de tipus $S := S(X, G, \mathbb{K})$. És clar que aquests semigrups són commutatius i amb element neutre $0 = [\emptyset]$, és a dir, són *monoides commutatius*. També tenen una altra propietat que és òbvia:

- $S(X, G, \mathbb{K})$ és *cònic*, en el sentit que $x + y = 0 \implies x = y = 0$.

Finalment, es compleix una condició que és força important, i que s'obté del fet que estem treballant amb una àlgebra de conjunts. Es tracta de l'anomenada *propietat de refinament de Riesz*.

Definició 13. Un semigrup S satisfà la *propietat de refinament de Riesz* si sempre que $a + b = c + d$ existeixen $x, y, z, t \in S$ tals que $a = x + y$, $b = z + t$, $c = x + z$ i $d = y + t$.

Aquesta propietat es pot expressar en la forma d'una matriu, anomenada *matriu de refinament*:

$$\begin{array}{c|c|c|} & c & d \\ \cline{2-3} a & x & y \\ \cline{2-3} b & z & t \\ \cline{2-3} \end{array}$$

En aquesta matriu, les files i les columnes sumen l'element que indica la fila o columna corresponent. Es pot demostrar fàcilment per inducció que en un semigrup de refinament tota identitat $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$ admet una matriu de refinament $n \times m$.

Ara podem establir la propietat de refinament de Riesz per al semigrup de tipus $S(X, G, \mathbb{K})$:

PROPOSICIÓ 14. *Sigui G un grup que actua parcialment sobre un espai compacte Hausdorff de dimensió zero X i sigui $\mathbb{K}$ l'àlgebra dels subconjunts oberts i tancats de X. Llavors $S(X, G, \mathbb{K})$ satisfà la propietat de refinament de Riesz.*

PROVA. Per a provar-ho, farem servir la descripció de $S(X, G, \mathbb{K})$, que és anàloga a la presentada a la definició 3. Veiem, per tant, els elements de $S(X, G, \mathbb{K})$ com a classes $[A]$, on $A = \bigcup_{i \in I} A_i \times \{i\}$, I és un subconjunt finit de $\mathbb{N}$ i $A_i \in \mathbb{K}$ per a tot i.

Suposem que tenim $[A] + [B] = [C] + [D]$ a $S(X, G, \mathbb{K})$. Siguin N_1 i N_2 els conjunts de nivells de A i B respectivament, i siguin M_1 i M_2 els conjunts de nivells de C i D respectivament. Sense pèrdua de generalitat, podem considerar que $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ i $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Ara tenim que $A \cup B \sim_{G^*} C \cup D$, amb la G^*-equidescomponibilitat implementada únicament amb membres de $\mathbb{K}$. Així doncs, podem trobar elements $g_1, \dots, g_l \in G$; subconjunts $Z_1, \dots, Z_l$ de X tals que $Z_i \in \mathbb{K}$ i $Z_i \subseteq X_{g_i^{-1}}$, i enters positius $n_1, \dots, n_l, m_1, \dots, m_l$ tals que

$$A \cup B = \bigsqcup_{i=1}^{l} Z_i \times \{n_i\}, \quad C \cup D = \bigsqcup_{i=1}^{l} \theta_{g_i}(Z_i) \times \{m_i\}.$$

Definim

$$A_1 = \bigsqcup_{n_i \in N_1,\, m_i \in M_1} Z_i \times \{n_i\}, \quad A_2 = \bigsqcup_{n_i \in N_1,\, m_i \in M_2} Z_i \times \{n_i\},$$

$$B_1 = \bigsqcup_{n_i \in N_2,\, m_i \in M_1} Z_i \times \{n_i\}, \quad B_2 = \bigsqcup_{n_i \in N_2,\, m_i \in M_2} Z_i \times \{n_i\}.$$

Llavors tenim $A = A_1 \sqcup A_2$, $B = B_1 \sqcup B_2$, i també $C \sim_{G^*} A_1 \sqcup B_1$, $D \sim_{G^*} A_2 \sqcup B_2$. Per tant, obtenim el refinament

$$[A] = [A_1] + [A_2], \quad [B] = [B_1] + [B_2], \quad [C] = [A_1] + [B_1], \quad [D] = [A_2] + [B_2],$$

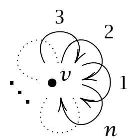
com volíem. □

6 Fallida de l'alternativa de Tarski per a accions sobre espais topològics

Sigui G un grup que actua sobre un conjunt X i E, un subconjunt de X. Segons l'*alternativa de Tarski*, o bé E és paradoxal, o bé existeix una mesura finitament additiva sobre $\mathcal{P}(X)$ tal que $\mu(E) = 1$ (vegeu el teorema 5). En aquesta secció veurem certes construccions que ens permetran afirmar que l'alternativa de Tarski no es compleix en el context topològic introduït a les dues seccions anteriors.

Sigui ara G un grup amb una acció parcial sobre un espai compacte Hausdorff de dimensió zero X. De les construccions de [2] se segueix que el semigrup $S(X, G, \mathbb{K})$ és bàsicament arbitrari, amb la sola restricció de ser un monoide commutatiu cònic i de refinament. La idea per a demostrar aquest resultat sobre el semigrup de tipus $S(X, G, \mathbb{K})$, i en particular la fallida de l'alternativa de Tarski en el context topològic, és utilitzar la teoria de grafs. En aquest cas, els nostres grafs seran grafs dirigits.

Per veure un exemple senzill i il·lustratiu, descriurem el sistema dinàmic parcial associat a l'anomenada *àlgebra de Cuntz* $\mathcal{O}_n$ (vegeu [6] i les seves referències). Hom defineix una acció parcial del grup lliure amb n generadors $\mathbb{F}_n$ sobre l'espai de Cantor $X = \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$. L'espai X es pot descriure com l'espai de camins infinits sobre el graf dirigit R_n que té un únic vèrtex i n arestes, anomenat de vegades la *rosa de n-pètals*:



Per a $1 \le i \le n$, posem $X_i = \{(i, a_2, a_3, \dots)\} \subseteq X$, i definim $s_i \colon X \to X_i$ com

$$s_i(a_1, a_2, \dots) = (i, a_1, a_2, \dots).$$

Denotant per s_i^* la inversa de s_i (que és una aplicació parcialment definida sobre X), tenim que

$$s_i^* s_j = \delta_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{n} s_j s_j^* = 1.$$

Aquestes importants relacions van ser considerades per Cuntz en el seu article [6]. Es pot demostrar que existeix una acció parcial de $\mathbb{F}_n$ sobre X que envia els generadors del grup lliure $\mathbb{F}_n$ a $s_1, s_2, \dots, s_n$.

L'àlgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$ es pot obtenir a partir de l'acció parcial anterior gràcies a una construcció algebraicoanalítica anomenada *producte creuat parcial* (vegeu [7]). Es pot demostrar que el semigrup de tipus $S(X, \mathbb{F}_n, \mathbb{K})$ és isomorf al monoide cíclic $C_n = \langle a \mid a = na \rangle$. No entrarem en detalls sobre aquests punts, però observem d'entrada que això implica que el semigrup $S(X, \mathbb{F}_n, \mathbb{K})$ no satisfà l'axioma de Schröder-Bernstein si $n \ge 3$, ja que en aquest cas tenim que $a \le 2a \le a$, però $a \ne 2a$ en el monoide C_n.

Observem que en l'exemple anterior tenim una descomposició $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i$ junt amb homeomorfismes $s_i\colon X \to X_i$. Això és el que determina la relació $[X] = n[X]$ en el semigrup de tipus $S(X, \mathbb{F}_n, \mathbb{K})$. Podem obtenir una classe molt més àmplia d'exemples prenent grafs dirigits amb certes particions de les arestes. Això es pot visualitzar pensant que donem diferents colors a les arestes, i pensem que les arestes que tenen el mateix color estan al mateix conjunt de la partició. Concretament, tenim la definició de graf separat, que va ser introduïda a [3]. Per entendre-la bé cal recordar que un *graf dirigit* és una quàdrupla $E = (E^0, E^1, r, s)$, on E^0 és el conjunt dels seus vèrtexs, E^1 és el conjunt de les seves arestes, i r, $s\colon E^1 \to E^0$ són aplicacions que descriuen, respectivament, el vèrtex terminal i el vèrtex inicial de les arestes.

Definició 15. Un *graf separat* és una parella (E, C), on $E = (E^0, E^1, r, s)$ és un graf dirigit, $C = \bigsqcup_{v \in E^0} C_v$, i C_v és una partició de $r^{-1}(v)$ (en subconjunts no buits i mútuament disjunts) per a cada vèrtex v de E.

Encara que no és estrictament necessari, és convenient utilitzar grafs dirigits bipartits. Això permet visualitzar millor les propietats. En general, considerant un graf bipartit, podem trobar una versió «externa» del nostre sistema dinàmic que conté dues còpies disjuntes del conjunt que volem estudiar.

Definició 16. Diem que un graf separat (E, C) és *bipartit* si

$$E^0 = E^{0,0} \sqcup E^{0,1}$$

i totes les arestes van de $E^{0,1}$ a $E^{0,0}$.

Cada graf separat bipartit finit (E, C) ens dona un model diferent de sistema dinàmic (parcial), amb unes relacions determinades en el seu semigrup de tipus.

Definició 17. Sigui (E, C) un graf separat bipartit finit. Un (E, C)-sistema dinàmic és un espai topològic compacte Hausdorff Ω amb una família $\{\Omega_v\}_{v \in E^0}$ de subconjunts oberts i tancats tal que

$$\Omega = \bigsqcup_{v \in E^0} \Omega_v$$

i, per a cada $v \in E^{0,0}$, una família de subconjunts oberts i tancats $\{H_e\}_{e \in r^{-1}(v)}$ de Ω_v tal que

$$\Omega_v = \bigsqcup_{e \in A} H_x$$

per a cada $A \in C_v$, junt amb una família d'homeomorfismes $\theta_e\colon \Omega_{s(e)} \to H_e$ per a cada $e \in E^1$.

Donats dos (E, C)-sistemes dinàmics (Ω, θ) i (Ω', θ'), hi ha una noció natural de morfisme equivariant $f\colon (\Omega, \theta) \to (\Omega', \theta')$. Diem que una aplicació $f\colon \Omega \to \Omega'$ és *equivariant* si $f(\Omega_v) \subseteq \Omega'_v$ per a tot $v \in E^0$, $f(H_e) \subseteq H'_e$ per a tot $e \in E^1$ i $f(\theta_e(t)) = \theta'_e(f(t))$ per a tot $e \in E^1$ i $t \in \Omega_{s(e)}$.

Establim que (Ω, θ) és un (E, C)-sistema dinàmic *universal* si existeix una única aplicació contínua i equivariant de qualsevol altre (E, C)-sistema dinàmic en (Ω, θ).

TEOREMA 18 ([2]). *Donat un graf separat bipartit (E,C), existeix un (E,C)-sistema dinàmic universal $(\Omega(E,C),\theta_{(E,C)})$. El grup lliure $\mathbb{F}(E^1)$ en les arestes de E actua parcialment per homeomorfismes sobre $\Omega(E,C)$ de manera que l'homeomorfisme parcial associat a un generador $e \in E^1$ del grup lliure és precisament $(\theta_{(E,C)})_e$.*

Observem que tenim

$$\Omega(E,C) = \bigsqcup_{v\in E^0} \Omega_v$$

i per a cada $v \in E^{0,0}$ i $A \in C_v$,

$$[\Omega_v] = \sum_{e\in A} [\Omega_{s(e)}]$$

en el semigrup de tipus $S(\Omega(E,C),\mathbb{F}(E^1),\mathbb{K})$.

Descrivim ara una generalització del sistema dinàmic associat a les àlgebres de Cuntz, que hem vist anteriorment. Siguin m i n enters tals que $1 \le m \le n$. Considerem parelles d'espais compactes Hausdorff (X,Y) tals que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \bigcup_{j=1}^{m} V_j,$$

on els H_i són subconjunts oberts i tancats mútuament disjunts de X, cadascun d'ells homeomorf a Y via homeomorfismes $h_i \colon Y \to H_i$, per a $1 \le i \le n$. Anàlogament, suposem que els V_j són subconjunts oberts i tancats mútuament disjunts de X, cadascun d'ells homeomorf a Y via homeomorfismes $v_j \colon Y \to V_j$, per a $1 \le j \le m$.

Ens referirem llavors a un (m,n)-sistema dinàmic $(X,Y,\{h_i\}_{i=1}^n,\{v_j\}_{j=1}^m)$.

Observem que els (m,n)-sistemes dinàmics corresponen als $(E(m,n), C(m,n))$-sistemes dinàmics, on $(E(m,n),C(m,n))$ és el graf separat amb $E(m,n)^{0,0} = \{v\}$, $E(m,n)^{0,1} = \{w\}$, i $C(m,n) = \{A,B\}$, on A i B tenen n i m arestes respectivament, i totes les arestes van de w a v. L'exemple on $m = 2$ i $n = 3$ es mostra a la figura 1.

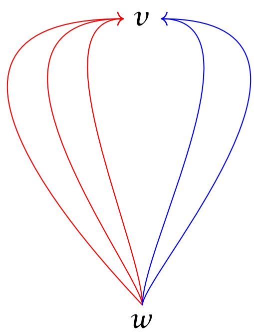


FIGURA 1: El graf separat $(E(2,3),C(2,3))$.

Si $(X, Y, \{h_i\}_{i=1}^n, \{v_j\}_{j=1}^m)$ és un (m,n)-sistema dinàmic, tenim la relació següent en el semigrup de tipus $S(X \sqcup Y, \mathbb{F}_{m+n}, \mathbb{K})$:

$$n[Y] = \sum_{i=1}^n [H_i] = [X] = \sum_{j=1}^m [V_j] = m[Y],$$

o sigui, $m[Y] = n[Y]$.

Denotem per $(X^u, Y^u, \{h_i^u\}_{i=1}^n, \{v_j^u\}_{j=1}^m)$ el (m,n)-sistema dinàmic universal, que existeix com a conseqüència del teorema 18. Observem que tenim

$$\Omega(E(m,n), C(m,n)) = X^u \sqcup Y^u, \quad X^u = \bigcup_{i=1}^n H_i^u = \bigcup_{j=1}^m V_j^u,$$

i homeomorfismes $h_i^u \colon Y^u \to H_i^u$, $v_j^u \colon Y^u \to V_j^u$.

Es demostra a [2, corol·lari 7.6] que el semigrup de tipus

$$S := S(\Omega(E(m,n), C(m,n)), \mathbb{F}_{n+m}, \mathbb{K})$$

associat al (m,n)-sistema dinàmic universal $(X^u, Y^u, \{h_i^u\}_{i=1}^n, \{v_j^u\}_{j=1}^m)$ conté el monoide

$$C_{m,n} := \langle a : ma = na \rangle.$$

Més precisament, existeix un morfisme de monoides injectiu $\iota \colon C_{m,n} \to S$ tal que, per a $x, y \in C_{m,n}$, tenim $x \leq y$ a $C_{m,n}$ si, i només si, $\iota(x) \leq \iota(y)$ a S. (Un morfisme injectiu amb aquesta propietat s'anomena *injecció d'ordre*.) A més, tenim que $\iota(a) = [Y^u]$.

Per a $1 < m < n$, el monoide $C_{m,n}$ té una estructura peculiar. Podem dir que és cíclic d'ordre $n - m$ «a partir de m». Més concretament,

$$C_{m,n} = \{0\} \cup \{a, \dots, (m-1)a\} \cup \{ma, (m+1)a, \dots, (n-1)a\},$$

amb $ia \neq ja$ per a $i \neq j$ si $1 \leq i \leq m-1$, $j \in \mathbb{N}$, i $ia = ja$ si, i només si, $i - j \in (n-m)\mathbb{Z}$ si $i, j \geq m$. En particular, tenim que $2a \not\leq a$ a $C_{m,n}$ i, per tant, $2[Y^u] = 2\iota(a) \not\leq \iota(a) = [Y^u]$ a S, atès que ι és una injecció d'ordre. Deduïm que Y^u no és un conjunt paradoxal. En canvi, no pot haver-hi una mesura invariant sobre l'àlgebra $\mathbb{K}$ d'oberts i tancats de $\Omega(E(m,n), C(m,n))$ tal que $\mu(Y^u) = 1$. De fet, si aquesta mesura μ existís, llavors, denotant també per μ l'homomorfisme de semigrups $S \to [0, \infty]$ associat i tenint en compte la relació $m[Y^u] = n[Y^u]$ a S, tindríem:

$$m = \mu(m[Y^u]) = \mu(n[Y^u]) = n,$$

fet que contradiu la hipòtesi que $m < n$.

Per tant, podem concloure que l'alternativa de Tarski no es compleix en el context topològic. Finalment observem que, utilitzant els resultats de globalització d'accions parcials d'Abadie [1], es pot demostrar que existeixen *accions globals* que satisfan les propietats esmentades anteriorment (vegeu [2, secció 7]), de manera que l'alternativa de Tarski no es compleix tampoc en el context d'accions globals sobre espais topològics.

Referències

[1] Abadie, F. «Enveloping actions and Takai duality for partial actions». *J. Funct. Anal.*, 197 (1) (2003), 14–67.

[2] Ara, P.; Exel, R. «Dynamical systems associated to separated graphs, graph algebras, and paradoxical decompositions». *Adv. Math.*, 252 (2014), 748–804.

[3] Ara, P.; Goodearl, K. R. «Leavitt path algebras of separated graphs». *J. Reine Angew. Math.*, 669 (2012), 165–224.

[4] Banach, St.; Tarski, A. «Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes». *Fund. Math.*, 6 (1924), 244–277.

[5] Burillo, J. «Grups i la paradoxa de Banach-Tarski». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 23 (2) (2008), 181–199.

[6] Cuntz, J. «Simple C^*-algebras generated by isometries». *Comm. Math. Phys.*, 57 (2) (1977), 173–185.

[7] Exel, R. *Partial Dynamical Systems, Fell Bundles and Applications*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2017. (Mathematical Surveys and Monographs; 224)

[8] Grabowski, Ł.; Máthé, A.; Pikhurko, O. «Measurable circle squaring». *Ann. of Math. (2)*, 185 (2) (2017), 671–710.

[9] Kerr, D.; Nowak, P. W. «Residually finite actions and crossed products». *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 32 (5) (2012), 1585–1614.

[10] Laczkovich, M. «Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem». *J. Reine Angew. Math.*, 404 (1990), 77–117.

[11] Laczkovich, M. «Decomposition of sets with small boundary». *J. London Math. Soc. (2)*, 46 (1) (1992), 58–64.

[12] Ma, X. «Comparison and pure infiniteness of crossed products». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372 (10) (2019), 7497–7520.

[13] Pla Carrera, J. «L'axioma de l'elecció i la paradoxa de Banach-Tarski». *Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques*, 15 (1983), 103–168.

[14] Rainone, T. «Noncommutative topological dynamics». *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 112 (5) (2016), 903–923.

[15] Rainone, T. «Finiteness and paradoxical decompositions in C*-dynamical systems». *J. Noncommut. Geom.*, 11 (2) (2017), 791–822.

[16] Rørdam, M.; Sierakowski, A. «Purely infinite C^*-algebras arising from crossed products». *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 32 (1) (2012), 273–293.

[17] Rosenberg, J. *Algebraic K-Theory and its Applications*. Nova York: Springer-Verlag, 1994. (Graduate Texts in Mathematics; 147)

[18] Tarski, A. «Problème 38». *Fund. Math.*, 7 (1925), 381.

[19] TARSKI, A. «Algebraische Fassung des Maßproblems». *Fund. Math.*, 31 (1938), 207–223.

[20] TOMKOWICZ, G.; WAGON, S. *The Banach-Tarski Paradox*. 2a ed. Nova York: Cambridge University Press, 2016. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; 163) [Amb un pròleg de Jan Mycielski]

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA
para@mat.uab.cat